Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

Free Vibration Analysis of Sandwich Panel Plate with FML Face Sheet and Flexible Core using Third-Order Shear Deformation Theory

Research Article

Mohammad Heravi[1], Mohammad Mahdi Khatibi[2], Alireza Albooyeh[3]

DOI: 10.22067/jacsm.2022.76843.1122

1. Introduction

One of the practical factors in the design of structures is low weight and high mechanical properties in various industries. Sandwich composites can improve the challenges of weight reduction and high mechanical strength applications in aerospace, marine, automotive, and architecture industries.

This study investigated the free vibration of sandwich panel with first shear theory for the thin top-bottom face sheets and third shear deformation theory for thick soft-core. After validating the equations of motion and obtaining the free vibration parameters, the effects of design parameters, thickness core to top face sheet ratio, length to thickness ratio, and volume fraction of fiber-metal composite are investigated.

2. Equation of motion

In order to derive the governing equations of motion for free vibration analysis of sandwich panel plate, first shear deformation theory for upper-bottom face sheets are used. Based on the Mindlin-Reissner theory, the components of displacement field are:

$$\begin{cases} u^{t,b}(x,y,z,T)=u_0^{t,b}(x,y,T)+z_{t,b}\,u_1^{t,b}(x,y,T) \\ v^{t,b}(x,y,z,T)=v_0^{t,b}(x,y,T)+z_{t,b}\,v_1^{t,b}(x,y,T) \\ w^{t,b}(x,y,z,T)=w_0^{t,b}(x,y,T) \end{cases} \quad (1)$$

In Equation 1, $u^{t,b}$, $v^{t,b}$ and $w^{t,b}$ are the components of displacement in x, y and z direction, respectively; $u_0^{t,b}$, $v_0^{t,b}$ and $w_0^{t,b}$ are translational components, and $u_1^{t,b}$, $v_1^{t,b}$ are rotational ones.

The displacement components u^c, v^c and w^c of a generic point in the core are related to the mid surface displacement u_0^c, v_0^c and w_0^c by:

In Equation 2, u_1^c, v_1^c and w_1^c functions are rotational; the parameters u_2^c, u_3^c, v_2^c, v_3^c, w_2^c and w_3^c are Taylor series high-order sentences.

Compatibility conditions between face sheets and soft core have been established. Therefore, the mentioned

conditions have reduced independent variables from 22 to 16.

$$\begin{cases} u^c(x,y,z,T)=u_0^c(x,y,T)+zu_1^c(x,y,T) \\ +z^2u_2^c(x,y,T)+z^3u_3^c(x,y,T) \\ v^c(x,y,z,T)=v_0^c(x,y,T)+zv_1^c(x,y,T) \\ +z^2v_2^c(x,y,T)+z^3v_3^c(x,y,T) \\ w^c(x,y,z,T)=w_0^c(x,y,T)+zw_1^c(x,y,T) \\ +z^2w_2^c(x,y,T)+z^3w_3^c(x,y,T) \end{cases} \quad (2)$$

3. Free vibration solution

For solving the governing equations the assumed mode was used. In this method, the response is considered a two-dimensional Fourier series form in a harmonic time function with unknown coefficients. The responses functions should satisfy geometric boundary conditions of the problem; so the responses can be expressed as Equation 3.

$$\begin{bmatrix} u_0^i \\ v_0^i \\ w_0^i \\ u_1^i \\ v_1^i \\ u_f^c \\ v_f^c \\ w_f^c \end{bmatrix} = e^{-I\omega t} * \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{0mn}^i\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{0mn}^i\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ W_{0mn}^i\sin(\alpha x)\sin(\beta y) \\ U_{1mn}^i\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{1mn}^i\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ U_{fmn}^c\cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{fmn}^c\sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ W_{fmn}^c\sin(\alpha x)\sin(\beta y) \end{bmatrix}_{i=t,b \quad f=2,3} \quad (3)$$

$$\alpha=\frac{m\pi}{a} \qquad \beta=\frac{n\pi}{b}$$

where m and n are the wave numbers in the direction of x and y respectively and $U_{0,1}^{t,b}$, $V_{0,1}^{t,b}$, $W_0^{t,b}$, $U_{2,3}^c$, $V_{2,3}^c$ and $W_{2,3}^c$ shows the variables coefficients of the Fourier series. By substituting Equation 3 in the equations of motion, problem converts to the Eigen

*Manuscript received: June 5, 2022, Revised, July 27, 2022, Accepted, November 26, 2022.

[1] PhD Candidate, Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran.

[2] Corresponding author. Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Semnan University, Semnan, Iran.

Email: mmkhatibi@semnan.ac.ir

[3] Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Damghan University, Damghan, Iran.

value problem (Equation 4).

In Equation 4, [M] and [K] are mass and stiffness matrices, respectively.

$$\begin{aligned} &\left|[K]-[M]\omega^2\right|\{\chi\}=0 \\ &\{\chi\}=[U_0^t, V_0^t, W_0^t, U_0^b, V_0^b, W_0^b, U_1^t, V_1^t, \\ &U_1^b, V_1^b, U_2^c, V_2^c, W_2^c, U_3^c, V_3^c, W_3^c]^T \end{aligned} \quad (4)$$

4. Numerical results

In this part, first, the accuracy of the dimensionless natural frequency obtained from the proposed equations were studied. Then, the effect of volume fraction of aluminum layer, length to total thickness ratio, and core-to-face sheet thickness ratio was studied.

Table 1. Comparison of dimensionless natural frequency of sandwich panel (0/90/core/0/90), a/b=1 and a/h=10

hc/ht	present	[23]	err. (%)	[24]	err. (%)	[25]	err. (%)
10	1.85	1.85	0.00	1.84	0.54	1.84	0.54
20	2.15	2.13	0.94	2.13	0.94	2.13	0.939
30	2.35	2.33	0.86	2.33	0.86	2.33	0.86
40	2.49	2.47	0.81	2.46	1.22	2.47	0.81
50	2.58	2.56	0.78	2.56	0.78	2.56	0.78
Avg.			0.68		0.87		0.79

Table 2. Comparison of the first dimensionless natural frequency of square sandwich panel with lay-up AL/-θ/θ/Core/θ/-θ/AL, hc/ht=10 and a/h=10

Material	v_c	θ	
		$\pi/6$	$\pi/4$
GLAR	1	14.63	15.60
	0.9	15.81	17.47
	0.8	16.28	18.05
	0.7	16.43	18.23
	0.6	16.43	18.24
	0.5	16.39	18.18
	0.4	16.39	18.15
	0.3	16.47	18.19
	0.2	16.67	18.35
	0.1	17.02	18.65
CARAL	1	15.61	17.69
	0.9	17.26	19.17
	0.8	18.14	20.12
	0.7	18.57	20.69
	0.6	18.73	20.97
	0.5	18.71	21.02
	0.4	18.59	20.92
	0.3	18.45	20.71
	0.2	18.34	20.46
	0.1	18.30	20.20

For validating, the proposed equations with different conditions were compared with the results of other analytical and numerical researches. Table 1 demonstrates that the results of the first natural frequency for the core-to-face sheet thickness ratio differs 1% from the results of the exact solution.

Table 2 shows the first dimensionless natural frequencies for volume fraction of two materials GLAR and CARAL with two different directions of lay-up. The results show that the frequency of CARAL material has the highest amount for angle of 45 degree and volume fraction in 0.5.

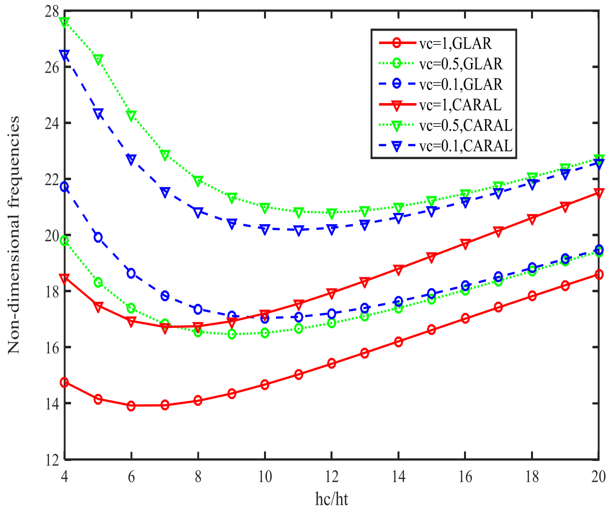


Figure 1. Comparison of the first dimensionless natural frequency for a square sandwich panel with respect to thickness ratio of the core to the top face sheet, the effective volume fraction of the composite and a/h=10

Figure 1 shows the dimensionless natural frequency for the thickness of the core to the top face sheet ratio with volume fraction 1, 0.5 and 0.1 for two types of materials of GLAR and CARAL. It is clear that the dimensionless natural frequency of AL/Carbon hybrid (CARAL) has higher value because of carbon stiffness.

5. Conclusion

This study investigated the free vibration of a sandwich panel with metal/composite hybrid face sheets reinforced carbon and glass fibres and a soft core under simply-support boundary conditions. The obtained results from analytical solution revealed that FML with lay-up AL/-45/45/core/45/-45/AL and volume fraction 0.5 has higher natural frequency in comparison with other angles and volume fractions. By increasing the thickness of the softcore to the face sheet and the ratio of the length sandwich panel to total thickness, the effect of the aluminium layer decreases.

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir



تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه ساندویچ پانل با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت و هسته انعطاف‌پذیر با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی*

مقاله پژوهشی

محمد هروی[۱]　　محمدمهدی خطیبی[۲]　　علیرضا آلبویه[۳]

DOI: 10.22067/jacsm.2022.77054.1123

چکیده *در این مقاله ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت تقویت‌شده با الیاف کربن و شیشه و هسته نرم دارای تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار گرفته است. برای استخراج معادلات حاکم، از تئوری مرتبه بالای چندلایه و اصل همیلتون برای ورق ساندویچی مستطیلی با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت و با فرض اتصال کامل رویه به هسته نرم و همچنین با فرض جابه‌جایی خطی استفاده شده است. پس از مقایسه و تصدیق نتایج تحقیق حاضر با نتایج تحقیقات مشابه موجود و اطمینان از صحت معادلات استخراج‌شده، اثرات حجم مؤثر لایه فلز و کامپوزیت با لایه‌چینی زاویه‌ای، پارامترهای هندسی نسبت طول به ضخامت و ضخامت هسته به رویه، طول به عرض و لایه‌چینی (۹۰و۰) و (۴۵و۴۵-) برای دو جنس الیاف شیشه و کربن هیبریدشده با آلومینیوم AL 2024 T3 مورد بررسی قرار گرفت. نتایج ارتعاشات آزاد نشان داد، هیبرید کربن/آلومینیوم در نسبت حجم مؤثر کامپوزیت (V_C) برابر با ۰/۵، بیشترین مقدار فرکانس طبیعی را در لایه‌چینی AL/-45/45/core/45/-45/AL در پنج مود اول داشته است و همچنین با افزایش ضخامت هسته به رویه و نسبت طول به ضخامت کل، اثر لایه آلومینیوم کاهش می‌یابد.*

واژه‌های کلیدی ساندویچ پانل، هیبرید فلز/کامپوزیت، تئوری مرتبه بالای چندلایه، لایه‌چینی زاویه‌ای، حجم مؤثر کامپوزیت.

Free Vibration Analysis of Sandwich Panel Plate with FML Face Sheet and Flexible Core Using Third-Order Shear Deformation Theory

Mohammad Heravi　　Mohammad Mahdi Khatibi　　Alireza Albooyeh

Abstract *This paper investigates the free vibrations of a sandwich panel with metal/composite hybrid face sheets reinforced with carbon and glass fibers and a soft core with simply-support boundary conditions. To derive the governing equations, with third shear deformation theory (TSDT) of multilayers and Hamilton's principle have been used for a rectangular sandwich panel with a metal/composite hybrid top and bottom face sheets. It is assumed full connection of the face sheets to the softcore and linear displacement. After comparing the results of the present research with similar and ensuring the correctness of the extracted equations, the parameters effective, volume fraction metal layer and composite with angular layering, the ratio of length to thickness and thickness of the core to the face sheet, length sandwich panel to width and the layup (0,90) and (45, -45) for two types of glass and carbon fibers hybridized with AL 2024 T3 aluminium investigated. The results showed that the carbon/aluminium hybrid with the volume of the composite (Vc) equal to 0.5 has the highest natural frequency value in the first five mode shapes with layup AL/-45/45/core/45/-45/AL. Also, by increasing the thickness of the softcore to the surface and the ratio of length sandwich panel to total thickness, the effect of the aluminium layer decreases.*

Key Words Sandwich Panel, Metal/Composite Hybrid (FML), Third-Order Shear Deformation Theory, Angle-ply Laminate, Volume Fraction Laminate

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۱/۳/۱۵ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۱/۹/۲۸ می‌باشد.

(۱) دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

(۲) نویسندهٔ مسئول، دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

(۳) دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران.

Email: mmkhatibi@semnan.ac.ir

مقدمه

یکی از فاکتورهای مهم کاربردی، طراحی سازه‌هایی با وزن کم و خواص مکانیکی بالا در صنایع مختلف می‌باشد. از مهم‌ترین ساختارها برای دستیابی به چنین هدفی، سازه‌های ساندویچ پانل می‌باشند. ساختارهای ساندویچ پانلی از دو رویه و یک یا چند هسته تشکیل‌شده‌اند که معمولاً از کامپوزیت‌ها، فلزات و یا هیبرید فلز/کامپوزیت با سفتی بالا برای رویه استفاده می‌شود. قابل ذکر است که کامپوزیت‌های ساندویچی مورد بحث، چالش‌های کاهش وزن و استحکام مکانیکی بالا در کاربردهای مختلف مانند هوافضا، دریایی، خودرو و معماری را بهبود بخشیده‌اند [1,2].

طی چند دهه گذشته تحقیقات متعددی برای ارزیابی دقیق ارتعاشات ساندویچ پانل‌ها انجام‌شده است. پاسخ ارتعاشی صفحات هیبرید فلز/کامپوزیت منجر به توسعه نظریه‌ها و روش-های تحلیلی مختلف شده است. این نظریه‌ها، مبتنی بر روش کلاسیک، جابه‌جایی مرتبه اول برشی و جابه‌جایی با مرتبه بالاتر می‌باشند. در ادامه تعدادی از مقالات در حوزه ساندویچ پانل و صفحات هیبریدی بررسی شده است.

کاتریا و پاندا [3] فرکانس طبیعی و خیز صفحه دو انحنای ساندویچ پانل با رویه کامپوزیت و هسته فوم ساده را بررسی کردند. این مطالعه با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و حل از طریق اجزای محدود انجام شده است. در تحقیقی دیگر رانی و لال [4] با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی، ارتعاشات آزاد ورق ساندویچ پانل با رویه کامپوزیت و هسته، مواد همگن را از تکنیک چبیشف (Chebeshev) (سه ریشه اول) برای شرایط مرزی آزاد، ساده و گیردار بررسی کردند. ایشان نشان دادند با افزایش نسبت ضخامت هسته به رویه در شرط مرزی گیردار، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

لیوانی و همکارانش [5] با استفاده از تئوری مرتبه بالای بهبودیافته و فرض اتصال کامل رویه به هسته، ارتعاشات آزاد استوانه ساندویچ پانل با رویه کامپوزیت و هسته نرم را بررسی کردند. در این تحقیق، شرایط مرزی به‌صورت گیردار- آزاد و ساده در نظر گرفته شده است. نتایج نشان داد، با افزایش ضخامت هسته در زاویه ۰ تا ۴۰ درجه، فرکانس طبیعی افزایش و در زاویه ۴۰ تا ۹۰ درجه، فرکانس کاهش یافته است. در مطالعه‌ای دیگر نصیحت‌گذار و خلیلی [6] ارتعاشات آزاد صفحه مستطیلی ساندویچ پانل با هسته فوم ساده و رویه کامپوزیت را با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی بررسی کردند. در این تحقیق، مسئله با استفاده از روش تفاضلات مربعی (DQM) در حالت سه‌بعدی و شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفت. آنها نشان دادند، افزایش ضخامت هسته و شرط مرزی گیردار باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود.

قدس بین جهرمی و حاتمی [7] ضربه سرعت‌پایین را بر استوانه‌ای از جنس لوله فلزی آلومینیوم در زوایای مختلف بررسی کردند؛ این مطالعه با استفاده از حل عددی (آباکوس) انجام شده است. در تحقیقی دیگر حاتمی و شریعتی [8] استوانه فولادی را تحت بارگذاری چرخشی محوری (axial cyclic loading) به‌صورت تجربی و عددی در نرم‌افزار آباکوس بررسی کردند، حل عددی در مدل پوسته همسانگرد، غیر خطی و کرنش پلاستیک با نتایج آزمایشگاهی تطابق خوبی داشته است.

حاتمی و همکاران [9] صفحات نازک را با استفاده از پرتابه-های کروی آلومینیومی مورد آزمایش ضربه سرعت‌بالا قرار دادند و مواردی همچون قطر پرتابه، سرعت ضربه و ضخامت ورق را بررسی کردند.

ژای و همکارانش [10] خواص دینامیکی صفحه دو انحنای ساندویچ پانل با رویه کامپوزیت و دو هسته ساده از جنس ویسکوالاستیک را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و تکنیک ناویر بررسی کردند. در تحقیقی دیگر ملک‌زاده فرد و همکاران [11] بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد و خمش استاتیکی ورق ساندویچی انحنادار با لایه روغن هوشمند مغناطیسی در رویه‌ها و هسته از جنس فوم با شرط مرزی تکیه‌گاهی ساده را با اعمال بار خمشی استاتیکی بررسی کردند. در این تحقیق، معادلات با استفاده از تئوری مرتبه بالای بهبودیافته و اصل همیلتون برای اولین بار استخراج شد.

لوپاتین و مروزو [12] فرکانس اساسی صفحه ساندویچ پانل تحت اثر جرم در مرکز را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و حل ریلی ریتز بررسی کردند. در این تحقیق رویه از جنس کامپوزیت و هسته فوم ساده بود. اسزکرینیس [13] خیز صفحه دو انحنای ساندویچ پانل با رویه مواد همگن و دو هسته از جنس فوم را با استفاده از تکنیک نیمه‌لایه و مقایسه تئوری مرتبه اول برشی، مرتبه دوم برشی و مرتبه سوم برشی بررسی کرده است.

رفتار ارتعاشی سازه‌های هیبریدی یکی از مواردی است که قابلیت بررسی بیشتری دارد. بنابراین راویشانکار و همکاران [14] ارتعاشات آزاد تیرهای هیبرید فلز/کامپوزیت (Fiber metal

(laminate beam)، درجه‌بندی‌شده (Functionally graded beams) و ترکیبی (Hybrid composite beams) را در دو حالت دوار و ثابت با استفاده از روش اجزای محدود بررسی کردند. شوشتری و رضوی [15] ارتعاشات غیرخطی یک صفحه مستطیلی چندلایه هیبرید فلز/کامپوزیت را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و روش گالرکین مطالعه کردند. رحیمی و همکاران [16] پاسخ ارتعاشی صفحه دایره‌ای FML را با روش مربعات دیفرانسیل کامل حل کردند. ایریوندو و همکاران [17] خواص الاستیک و میرایی را برای چندلایه کامپوزیتی با الیاف شیشه و هیبریدی با تقویت پلی‌پروپیلن خود تقویت‌شده (Self-reinforced polypropylene) بررسی کردند. مهندس و همکاران [18] پاسخ ارتعاشی یک استوانه جدار نازک FML را با شرایط مرزی مختلف و حجم مؤثر لایه کامپوزیت با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی (Love) برای لایه‌چینی متعامد صفر و نود به‌دست آوردند.

با توجه به اینکه مراجع متعددی حل تحلیلی یا عددی ارتعا شات صفحه ساندویچی را مورد بر سی قرار داده‌اند، اما مطالعات بر روی ارتعا شات آزاد صفحه ساندویچ پانل با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت (FML) و با ا ستفاده از تئوری مرتبه بالای بر شی برای لایه‌چینی زاویه‌ای (Angle-ply laminate) و متعامد و دو جنس شیشه-اپوکسی و کربن-اپوکسی تقویت‌شده با آلومینیوم مورد بررسی قرار نگرفته است. همچنین با توجه به لزوم بررسی دقیق اثر لایه آلومینیوم و کامپوزیت به‌صورت مجزا و بالا بردن دقت محاسبات در رویه‌های هیبریدی، برای اولین بار از روابط تنش‌های برایند و ممان اینرسی که وابسته به ضخامت لایه فلز و چندلایه کامپوزیت می‌با شد، بهره برده شد. بنابراین، در این مقاله، به‌منظور استخراج معادلات حاکم بر سازه، از تئوری مرتبه اول بر شی برای رویه به‌دلیل ضخامت کم و تئوری مرتبه سوم برشی برای هسته به‌دلیل ضخامت قابل توجه استفاده گردیده است. به‌منظور اعتبارسنجی معادلات، پارامترهای نسبت ضخامت هسته به رویه و نسبت طول به ضخامت بر سی شده ا ست. سپس اثر حجم مؤثر لایه فلز و کامپوزیت، نسبت ضخامت هسته به رویه، ضخامت طول به ضخامت کل ساندویچ پانل، نسبت طول به عرض و بررسی دو نوع لایه‌چینی بر ارتعاشات ساندویچ پانل با رویه هیبریدی مورد مطالعه قرار گرفته است.

معادلات حرکت

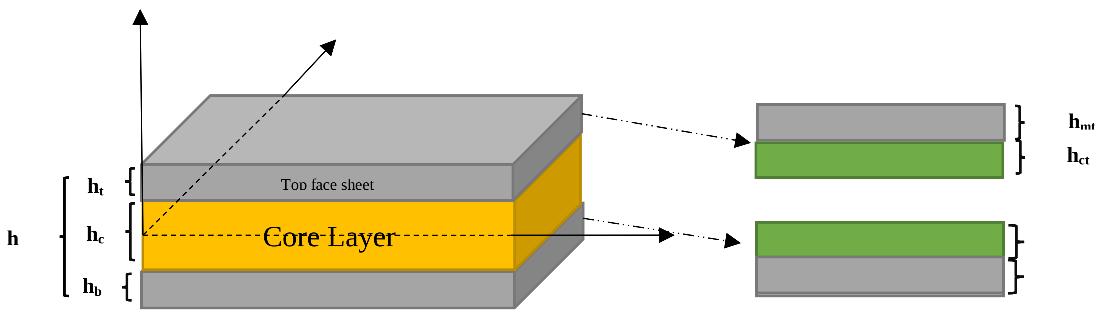
میدان جابه‌جایی و روابط تنش-کرنش

در شکل (۱) مدل هندسی مورد استفاده در این تحقیق که صفحه ساندویچ پانل مستطیلی متشکل از دو رویه هیبرید فلز/کامپوزیت اپوکسی تقویت‌شده با الیاف شیشه یا کربن و هسته فوم ساده می‌باشد، نشان داده شده است. ضخامت رویه‌های بالا و پایین و هسته ساندویچ پانل به ترتیب برابر h_t، h_b و h_c و مجموع ضخامت h در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است، برای استخراج معادلات فرضیات مسئله به شرح ذیل در نظر گرفته شده است.

۱. رویه و هسته و همچنین لایه فلز به کامپوزیت کاملاً متصل می‌باشد.

۲. رو یه ها از ترکیب ماده الاستیک و ایزوتروپ و هسته به‌صورت ماده الاستیک و نرم است.

۳. رو یه ها نازک و جابه جایی ها به‌صورت کوچک و خطی می‌باشد.



شکل ۱ نمایی از ساندویچ پانل مستطیلی مورد استفاده با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت

جهت بررسی معادلات حرکت به دلیل انعطاف‌پذیری هسته، مطالعات دارای پیچیدگی است؛ لذا با توجه به ضخامت کم رویه‌های بالا و پایین از جابه‌جایی‌های مرتبه اول برشی بر اساس تئوری Mindlin–Reissner مطابق روابط (۱) استفاده گردید.

$$\begin{cases} u^{t,b}(x,y,z,T) = u_0^{t,b}(x,y,T) + z_{t,b}\, u_1^{t,b}(x,y,T) \\ v^{t,b}(x,y,z,T) = v_0^{t,b}(x,y,T) + z_{t,b}\, v_1^{t,b}(x,y,T) \\ w^{t,b}(x,y,z,T) = w_0^{t,b}(x,y,T) \end{cases}$$

(۱)

در رابطه (۱)، پارامترهای $u^{t,b}$، $v^{t,b}$ و $w^{t,b}$ به ترتیب جابه‌جایی در جهت محورهای x، y و z هستند که $u_0^{t,b}$، $v_0^{t,b}$ و $w_0^{t,b}$ جابه‌جایی خطی و $u_1^{t,b}$ و $v_1^{t,b}$ چرخش حول محورهای x، y و z و T نیز بیانگر زمان است. با عنایت به ضخامت بالای هسته و پیش‌بینی جابه‌جایی در راستای ضخامت، از جابه‌جایی‌های مرتبه سوم برشی مطابق روابط (۲) استفاده گردید.

$$\begin{cases} u^c(x,y,z,T) = u_0^c(x,y,T) + z u_1^c(x,y,T) \\ +z^2 u_2^c(x,y,T) + z^3 u_3^c(x,y,T) \\ v^c(x,y,z,T) = v_0^c(x,y,T) + z v_1^c(x,y,T) \\ +z^2 v_2^c(x,y,T) + z^3 v_3^c(x,y,T) \\ w^c(x,y,z,T) = w_0^c(x,y,T) + z w_1^c(x,y,T) \\ +z^2 w_2^c(x,y,T) + z^3 w_3^c(x,y,T) \end{cases}$$

(۲)

در رابطه (۲)، T نشان‌دهنده زمان و جابه‌جایی‌های u^c، v^c و w^c به ترتیب در جهت محورهای x، y و z می‌باشند که u_0^c، v_0^c و w_0^c جابه‌جایی خطی، u_1^c، v_1^c و w_1^c چرخش و u_2^c، u_3^c، v_2^c، v_3^c، w_2^c و w_3^c جابه‌جایی‌های مرتبه بالاتر در سری تیلور هستند [19]؛ بنابراین، مجهولات درمجموع برای دو رویه و یک هسته تعداد ۲۲عدد است. روابط کرنش–جابه‌جایی خطی برای صفحه مستطیلی به‌صورت رابطه (۳) می‌باشد [20].

با جاگذاری روابط (۱ و ۲) در رابطه (۳)، مقادیر کرنش برای ورق بالایی، پایینی و هسته محاسبه می‌شود (رابطه ٤).

$$\varepsilon_x^i = \frac{\partial u^i}{\partial x} \qquad \varepsilon_y^i = \frac{\partial v^i}{\partial y} \qquad \varepsilon_z^i = \frac{\partial w^i}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy}^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial y} + \frac{\partial v^i}{\partial x}\right) \qquad \gamma_{xz}^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial z} + \frac{\partial w^i}{\partial x}\right)$$
$$\gamma_{yz}^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial z} + \frac{\partial w^i}{\partial y}\right) \qquad i = t, b, c$$

(۳)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x^i \\ \varepsilon_y^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{xz}^i \\ \gamma_{yz}^i \\ \gamma_{xy}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x0}^i \\ \varepsilon_{y0}^i \\ \varepsilon_{z0}^i \\ \gamma_{xz0}^i \\ \gamma_{yz0}^i \\ \gamma_{xy0}^i \end{pmatrix} + z^i \begin{pmatrix} k_{x1}^i \\ k_{y1}^i \\ k_{z1}^i \\ k_{xz1}^i \\ k_{yz1}^i \\ k_{xy1}^i \end{pmatrix}$$

(٤)

در رابطه (٤)، i نشان‌دهنده رویه‌ها است که i=t مربوط به رویه بالایی و i=b مربوط به رویه پایینی می‌باشد. روابط کرنش–جابه‌جایی هسته بر مبنای حل الاستیسیته سه‌بعدی مطابق روابط (۵) نشان داده شده است [21].

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_z^c \\ \gamma_{xz}^c \\ \gamma_{yz}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{z0}^c \\ \gamma_{xz0}^c \\ \gamma_{yz0}^c \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} k_{z1}^c \\ k_{xz1}^c \\ k_{yz1}^c \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} k_{z2}^c \\ k_{xz2}^c \\ k_{yz2}^c \end{pmatrix} + z^3 \begin{pmatrix} k_{z3}^c \\ k_{xz3}^c \\ k_{yz3}^c \end{pmatrix}$$

(۵)

شرایط پیوستگی

در این تحقیق، شرایط پیوستگی در فصل مشترک بین رویه‌ها با هسته برقرار است؛ بنابراین مؤلفه جابه‌جایی رویه‌های بالایی و هسته در فصل مشترک باهم برابرند. به‌این‌ترتیب شرایط پیوستگی به‌صورت رابطه (٦) می‌باشد.

$$\begin{cases} u^c|_{z=\frac{hc}{2}} = u^t|_{z=\frac{hc}{2}} \\ u^c|_{z=-\frac{hc}{2}} = u^b|_{z=-\frac{hc}{2}} \end{cases}, \begin{cases} v^c|_{z=\frac{hc}{2}} = v^t|_{z=\frac{hc}{2}} \\ v^c|_{z=-\frac{hc}{2}} = v^b|_{z=-\frac{hc}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^c|_{z=\frac{hc}{2}} = w^t|_{z=\frac{hc}{2}} \\ w^c|_{z=-\frac{hc}{2}} = w^b|_{z=-\frac{hc}{2}} \end{cases}$$

(٦)

با توجه به شکل (۱) مقدار z_t و z_b به‌صورت روابط (۱) به‌دست آمد.

$$z_t = z - \left(\frac{ht}{2} + \frac{hc}{2}\right) \qquad z_b = z + \left(\frac{ht}{2} + \frac{hc}{2}\right) \tag{۱}$$

با قرار دادن روابط (۱) و(۲) در رابطه(٦) و در نظر گرفتن رابطه (۱) و پس از ساده‌سازی معادلات روابط سازگاری

به‌صورت رابطه (۸) خواهند بود.

$$
\begin{aligned}
u_0^c &= \frac{1}{2}(u_0^b + u_0^t) + \frac{1}{4}(h_b u_1^b - h_t u_1^t) - \frac{{h_c}^2}{4} u_2^c \\
u_1^c &= \frac{1}{h_c}(u_0^t - u_0^b) - \frac{1}{2h_c}(h_b u_1^b + h_t u_1^t) - \frac{{h_c}^2}{4} u_3^c \\
v_0^c &= \frac{1}{2}(v_0^b + v_0^t) + \frac{1}{4}(h_b v_1^b - h_t v_1^t) - \frac{{h_c}^2}{4} v_2^c \\
v_1^c &= \frac{1}{h_c}(v_0^t - v_0^b) - \frac{1}{2h_c}(h_b v_1^b + h_t v_1^t) - \frac{{h_c}^2}{4} v_3^c \\
w_0^c &= \frac{1}{2}(w_0^b + w_0^t) - \frac{{h_c}^2}{4} w_2^c \\
w_1^c &= \frac{1}{h_c}(w_0^t - w_0^b) - \frac{{h_c}^2}{4} w_3^c
\end{aligned}
$$

(۸)

با محا سبه رابطه (۸) مجهولات م ستقل در ه سته به ٦ عدد کاهش یافت و این امر موجب گردید مجهولات معادلات حاکم از ۲۲ به ١٦ عدد کاهش یابد.

روابط تنش-کرنش

برای محا سبه میدان تنش-کرنش از قانون هوک و روابط بنیادین ماده ارتوتروپیک برای رویه‌های هیبرید فلز/کامپوزیت و هسته انعطاف‌پذیر در جهت‌های اصلی (۲،۱ و ۳) به‌صورت روابط (۹) استفاده شده است.

$$
\begin{aligned}
Q_{11}^i &= \frac{E_1^i(1 - \nu_{23}^i\nu_{32}^i)}{\Delta\nu^i} & Q_{12}^i &= \frac{E_1^i(\nu_{21}^i - \nu_{23}^i\nu_{31}^i)}{\Delta\nu^i} \\
Q_{22}^i &= \frac{E_2^i(1 - \nu_{13}^i\nu_{31}^i)}{\Delta\nu^i} & Q_{13}^i &= \frac{E_1^i(\nu_{31}^i - \nu_{21}^i\nu_{32}^i)}{\Delta\nu^i} \\
Q_{33}^i &= \frac{E_3^i(1 - \nu_{12}^i\nu_{21}^i)}{\Delta\nu^i} & Q_{23}^i &= \frac{E_2^i(\nu_{32}^i - \nu_{12}^i\nu_{31}^i)}{\Delta\nu^i} \\
Q_{44}^i &= G_{23}^i & Q_{21}^i &= Q_{12}^i \\
Q_{55}^i &= G_{13}^i & Q_{31}^i &= Q_{13}^i \\
Q_{66}^i &= G_{12}^i & Q_{32}^i &= Q_{23}^i
\end{aligned}
$$

$$
\Delta\nu^i = 1 - \nu_{12}^i\nu_{21}^i - \nu_{23}^i\nu_{32}^i - \nu_{13}^i\nu_{31}^i - 2\nu_{21}^i\nu_{32}^i\nu_{13}^i
$$

(۹)

در روابط بالا i ن شان‌دهنده رویه‌ها و ه سته می‌با شد که i=t رویه بالایی، i=b رویه پایینی و i=c مربوط به هسته ساندویچ پانل ا ست؛ جهت انتقال به محورهای x,y,z در رویه‌های هیبرید فلز/کامپوزیت از ماتریس انتقال استفاده گردید [20]. در ادامه پس از محاسبه روابط (٤) و (٥) و جایگذاری در قانون هوک، تنش برایند طبق روابط(۱۰) محاسبه گردید.

$$
\sigma^i = [Q]^i \varepsilon^i
$$

$$
\begin{bmatrix} N_x^i & M_x^i \\ N_y^i & M_y^i \\ Q_{xz}^i & 0 \\ Q_{yz}^i & 0 \\ Q_{xy}^i & S_{xy}^i \end{bmatrix} = \int_{z^i} \begin{Bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xz}^i \\ \tau_{yz}^i \\ \tau_{xy}^i \end{Bmatrix} (1, z^i)\, dz^i \qquad i = t, b
$$

$$
\begin{bmatrix} N_z & M_z & P_z & 0 \\ Q_{xz} & S_{xz} & R_{xz} & V_{xz} \\ Q_{yz} & S_{yz} & R_{yz} & V_{yz} \end{bmatrix}^c = \int_z \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^c (1, z\ , z^2, z^3)\, dz
$$

(۱۰)

در رابطه (۱۰)، N تنش برایند، M تنش برایند خمشی، Q تنش برایند نیروی برشی و (S ،R ،P و V) تنش‌های برایند مرتبه بالای برشی را نشان داده است.

استخراج معادلات حاکم

در این تحقیق، برای استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی بر طبق رابطه (۱۱) از اصل همیلتون استفاده گردید [20].

$$
\int_{t1}^{t2} \delta\,(L)\, dT = \int_{t1}^{t2} (\delta\,K - \delta U + \delta W) Dt \qquad (۱۱)
$$

که در آن δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW تغییرات کار نیروهای خارجی اعمال‌شده بر سی ستم ا ست. تغییرات انرژی جنبشی با فرض شرایط همگن برای جابه‌جایی و سرعت با توجه به مختصه زمان در شکل کلی به‌صورت روابط(۱۲) می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
\int_{t1}^{t2} \delta\,K &= \Big(\int_{t1}^{t2} \delta\,K^c dt + \sum_i^{t,b} \int_{t1}^{t2} \delta\,K^i dt\Big) \\
&= \int_0^t \int_z \int_{A^c} \rho^c (\dot{u}^c \delta\dot{u}^c + \dot{v}^c \delta\dot{v}^c + \dot{w}^c \delta\dot{w}^c) dA^c dz dT \\
&+ \Big\{\sum_i^{t,b} \int_0^t \int_{z^i} \int_{A^i} \rho^i (\dot{u}^i \delta\dot{u}^i + \dot{v}^i \delta\dot{v}^i + \dot{w}^i \delta\dot{w}^i) dA^i dz^i dT\Big\}
\end{aligned}
$$

(۱۲)

اندیس‌های c ،t و b نشان‌دهنده هسته میانی، رویه‌های هیبریدی بالایی و پایینی است. همچنین ρ^c و ρ^i به ترتیب چگالی هسته و رویه هیبرید فلز کامپوزیت می‌باشند.

تغییرات انرژی پتانسیل برای یک ورق ساندویچی با دو رویه

نازک و هسته ضخیم نرم به‌صورت رابطه(۱۳) بیان گردید.

$$\int_{t1}^{t2}\delta U=\int_{t1}^{t2}\delta U^{c}+\sum_{i}^{t,b}\int_{t1}^{t2}\delta U^{i}dt$$
$$=\int_{0}^{t}\int_{z}\int_{A^{c}}(\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz})^{c}dA^{c}dzdT$$
$$+\{\sum_{i}^{t,b}\int_{0}^{t}\int_{z^{i}}\int_{A^{i}}(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}$$
$$+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})^{i}dA^{i}dz^{i}dT\}$$

(۱۳)

در رابطه(۱۳)، σ^{l}_{j} و ε^{l}_{j} (j=x,y,z; l=t,b,c) بیانگر تنش‌های نرمال و کرنش‌های نرمال در رویه‌ها و هسته می‌باشند و τ و γ بیانگر تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی خارج از صفحه رویه‌ها و هسته هستند. لازم به ذکر است برای حالت ارتعاشات آزاد δW برابر صفر می‌باشد.

ماتریس سفتی سازه وابستگی به ماتریس‌های تنش برایند (رابطه ۱۰) دارد؛ به همین دلیل ضخامت‌های لایه فلز و کامپوزیت به‌صورت مجزا محاسبه شد و اثر دقیق لایه فلز و کامپوزیت در رویه هیبریدی رابطه (۱٤) به‌دست آمد. ضمناً ماتریس‌های تنش برایند مربوط به هسته در رابطه(۱۵) بیان گردیده است [22].

$$\begin{bmatrix}N\\M\end{bmatrix}^{i}=\begin{bmatrix}A&B\\B&D\end{bmatrix}^{i}\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\k_1\end{bmatrix}^{i}$$
$$N=[N_x\quad N_y\quad Q_{xz}\quad Q_{yz}\quad Q_{xy}]^{i}$$
$$M=[M_x\quad M_y\quad 0\quad 0\quad S_{xy}]^{i}$$

$$(A,B,D)^{t}=\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_{ct}-h_{mt}}{2}}\bar{Q}^{tc}_{jk}(1,z_t)dz_t$$
$$+\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\int_{\frac{h_{ct}-h_{mt}}{2}}^{\frac{h_t}{2}}\bar{Q}^{tm}_{jk}(1,z_t)dz_t$$
$$(A,B,D)^{b}=\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_{mb}-h_{cb}}{2}}\bar{Q}^{bm}_{jk}(1,z_b)dz_b$$
$$+\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\int_{\frac{h_{mb}-h_{cb}}{2}}^{\frac{h_b}{2}}\bar{Q}^{bc}_{jk}(1,z_b)dz_b$$

(۱٤)

$$\begin{bmatrix}N\\M\\P\\S\end{bmatrix}^{c}=\begin{bmatrix}A&B&D&E\\B&D&E&F\\D&E&F&G\\E&F&G&H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\k_1\\k_2\\k_3\end{bmatrix}^{c}$$
$$N=[N_z\quad Q_{xz}\quad Q_{yz}]^{c}$$
$$M=[M_z\quad S_{xz}\quad S_{yz}]^{c}$$
$$P=[P_z\quad R_{xz}\quad R_{yz}]^{c}$$
$$S=[0\quad V_{xz}\quad V_{yz}]^{c}$$
$$(A,B,D,E,F,G,H)^{c}=$$
$$\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}\int_{-\frac{h^c}{2}}^{\frac{h^c}{2}}\bar{Q}^{c}_{jk}(1,z,z^2,z^3,z^4,z^5,z^6)dz$$

(۱۵)

در رابطه (۱٤)، h_{mt} و h_{mb} مربوط به ضـــخامت لایه فلز در رویه بالایی و پایینی و h_{ct} و h_{cb} ضخامت چندلایه کامپوزیتی در رویه بالایی و پایینی و همچنین h_t، h_b به‌ترتیب ضـــخامت کل لایه هیبرید فلز-کامپوزیت در رویه بالایی و پایینی می‌باشد.

ممان اینرسی مربوط به صفحات رویه هیبریدی بالا و پایین و هسته مرکزی به‌صورت رابطه (١٦) می‌باشند.

$$(I_0,I_1,I_2)^{t}=\int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_{ct}-h_{mt}}{2}}\rho^{ct}(1,z_t,z_t^2)dz_t$$
$$+\int_{\frac{h_{ct}-h_{mt}}{2}}^{\frac{h_t}{2}}\rho^{mt}(1,z_t,z_t^2)dz_t$$

$$(I_0,I_1,I_2)^{b}=\int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_{mb}-h_{cb}}{2}}\rho^{mb}(1,z_b,z_b^2)dz_b$$
$$+\int_{\frac{h_{mb}-h_{cb}}{2}}^{\frac{h_b}{2}}\rho^{cb}(1,z_b,z_b^2)dz_b$$

$$(I_0,I_1,I_2,I_3,I_4,I_5,I_6)^{c}=\int_{-\frac{h^c}{2}}^{\frac{h^c}{2}}\rho^{c}(1,z,z^2,z^3,z^4,z^5,z^6)\,dz$$

(١٦)

با عنایت به اهمیت ممان اینرســی به‌عنوان ماتریس جرم در معادلات فرکانس، در رابطه (١٦)به‌صـورت مجزا ضـخامت لایه فلز و کامپوزیت محاســبه شــده اســت. درنهایت با قرار دادن تغییرات انرژی کرنشـی و جنبشـی در اصـل همیلتون معادلات حرکت برای ١٦ متغیر مستقل به دست آمده است (روابط ۱۷-۳۲).

$$\delta u_0^t:$$

$$\left(\frac{1}{4}I_0^c+I_0^t+\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)u_{0,tt}^t+\left(\frac{1}{4}I_0^c-\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)u_{0,tt}^b+\left(I_1^t-\frac{h_tI_0^c}{8}-\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{1,tt}^t+\left(\frac{h_bI_0^c}{8}-\frac{h_bI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{1,tt}^b+\left(\frac{I_2^c}{2}-\frac{h_c^2I_0^c}{8}\right)u_{2,tt}^c+\left(-\frac{h_cI_2^c}{4}+\frac{I_4^c}{h_c}\right)u_{3,tt}^c=N_{x,x}^t+Q_{xy,y}^t-\frac{Q_{xz}^c}{h_c}$$

(۱۷)

$$\delta v_0^t:$$

$$\left(\frac{1}{4}I_0^c+I_0^t+\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)v_{0,tt}^t+\left(\frac{1}{4}I_0^c-\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)v_{0,tt}^b+\left(I_1^t-\frac{h_tI_0^c}{8}-\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)v_{1,tt}^t+\left(\frac{h_bI_0^c}{8}-\frac{h_bI_2^c}{2h_c^2}\right)v_{1,tt}^b+\left(\frac{I_2^c}{2}-\frac{h_c^2I_0^c}{8}\right)v_{2,tt}^c+\left(-\frac{h_cI_2^c}{4}+\frac{I_4^c}{h_c}\right)v_{3,tt}^c=N_{y,y}^t+Q_{xy,x}^t-\frac{Q_{yz}^c}{h_c}$$

(۱۸)

$$\delta w_0^t:$$

$$\left(\frac{1}{4}I_0^c+I_0^t+\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)w_{0,tt}^t+\left(\frac{1}{4}I_0^c-\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)w_{0,tt}^b+\left(\frac{I_2^c}{2}-\frac{h_c^2I_0^c}{8}\right)w_{2,tt}^c+\left(-\frac{h_cI_2^c}{4}+\frac{I_4^c}{h_c}\right)w_{3,tt}^c=-\frac{N_z^c}{h_c}+\left(Q_{xz,x}+Q_{yz,y}^t\right)+\frac{Q_{xz,x}^c+Q_{yz,y}^c}{2}+\frac{S_{xz,x}^c+S_{yz,y}^c}{h_c}$$

(۱۹)

$$\delta u_0^b:$$

$$\left(\frac{1}{4}I_0^c+I_0^b+\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)u_{0,tt}^b+\left(\frac{1}{4}I_0^c-\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)u_{0,tt}^t+\left(I_1^b+\frac{h_bI_0^c}{8}+\frac{h_bI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{1,tt}^b+\left(-\frac{h_tI_0^c}{8}+\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{1,tt}^t+\left(\frac{I_2^c}{2}-\frac{h_c^2I_0^c}{8}\right)u_{2,tt}^c+\left(\frac{h_cI_2^c}{4}-\frac{I_4^c}{h_c}\right)u_{3,tt}^c=N_{x,x}^b+Q_{xy,y}^b+\frac{Q_{xz}^c}{h_c}$$

(۲۰)

$$\delta v_0^b:$$

$$\left(\frac{1}{4}I_0^c+I_0^b+\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)v_{0,tt}^b+\left(\frac{1}{4}I_0^c-\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)v_{0,tt}^t+\left(I_1^b+\frac{h_bI_0^c}{8}+\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)v_{1,tt}^b+\left(-\frac{h_tI_0^c}{8}+\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)v_{1,tt}^t+\left(\frac{I_2^c}{2}-\frac{h_c^2I_0^c}{8}\right)v_{2,tt}^c+\left(-\frac{h_cI_2^c}{4}+\frac{I_4^c}{h_c}\right)v_{3,tt}^c=N_{y,y}^b+Q_{xy,x}^b+\frac{Q_{xz}^c}{h_c}$$

(۲۱)

$$\left(\frac{1}{4}I_0^c+I_0^b+\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)w_{0,tt}^b+\left(\frac{1}{4}I_0^c-\frac{I_2^c}{h_c^2}\right)w_{0,tt}^t+\left(\frac{I_2^c}{2}-\frac{h_c^2I_0^c}{8}\right)w_{2,tt}^c+\left(\frac{h_cI_2^c}{4}-\frac{I_4^c}{h_c}\right)w_{3,tt}^c=\frac{N_z^c}{h_c}+\left(Q_{xz,x}^{b}+Q_{yz,y}^b\right)+\frac{Q_{xz,x}^c+Q_{yz,y}^c}{2}-\frac{S_{xz,x}^c+S_{yz,y}^c}{h_c}$$

(۲۲)

$$\delta u_1^t:$$

$$\left(-\frac{h_t}{8}I_0^c+I_1^t-\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{0,tt}^t+\left(-\frac{h_t}{8}I_0^c+\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{0,tt}^b+\left(I_2^t+\frac{{h_t}^2I_0^c}{16}+\frac{h_t^2I_2^c}{4h_c^2}\right)u_{1,tt}^t+\left(-\frac{h_bh_tI_0^c}{16}+\frac{h_bh_tI_2^c}{4h_c^2}\right)u_{1,tt}^b+\left(-\frac{h_tI_2^c}{4}+\frac{h_th_c^2I_0^c}{16}\right)u_{2,tt}^c+\left(\frac{h_th_cI_2^c}{8}-\frac{h_tI_4^c}{2h_c}\right)u_{3,tt}^c=M_{x,x}^t+S_{xy,y}^t+\frac{h_tQ_{xz}^c}{2h_c}-Q_{xz}^t$$

(۲۳)

$$\delta v_1^t:$$

$$\left(-\frac{h_t}{8}I_0^c+I_1^t-\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)v_{0,tt}^t+\left(-\frac{h_t}{8}I_0^c+\frac{h_tI_2^c}{2h_c^2}\right)v_{0,tt}^b+\left(I_2^t+\frac{{h_t}^2I_0^c}{16}+\frac{h_t^2I_2^c}{4h_c^2}\right)v_{1,tt}^t+\left(-\frac{h_bh_tI_0^c}{16}+\frac{h_bh_tI_2^c}{4h_c^2}\right)v_{1,tt}^b+\left(-\frac{h_tI_2^c}{4}+\frac{h_th_c^2I_0^c}{16}\right)v_{2,tt}^c+\left(\frac{h_th_cI_2^c}{8}-\frac{h_tI_4^c}{2h_c}\right)v_{3,tt}^c=M_{y,y}^{t}+S_{xy,x}^t+\frac{h_tQ_{yz}^c}{2h_c}-Q_{yz}^{t}$$

(۲٤)

$$\delta u_1^b:$$

$$\left(\frac{h_b}{8}I_0^c+I_1^b+\frac{h_bI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{0,tt}^b+\left(\frac{h_b}{8}I_0^c-\frac{h_bI_2^c}{2h_c^2}\right)u_{0,tt}^t+\left(I_2^b+\frac{{h_b}^2I_0^c}{16}+\frac{h_b^2I_2^c}{4h_c^2}\right)u_{1,tt}^b+\left(-\frac{h_bh_tI_0^c}{16}+\frac{h_bh_tI_2^c}{4h_c^2}\right)u_{1,tt}^t+\left(\frac{h_bI_2^c}{4}-\frac{h_bh_c^2I_0^c}{16}\right)u_{2,tt}^c+\left(\frac{h_bh_cI_2^c}{8}-\frac{h_bI_4^c}{2h_c}\right)u_{3,tt}^c=M_{x,x}^b+S_{xy,y}^b+\frac{h_bQ_{xz}^c}{2h_c}-Q_{xz}^b$$

(۲۵)

δv_1^b:

$$\left(\frac{h_b}{8} I_0^c + I_1^b + \frac{h_b I_2^c}{2h_c^2}\right) v_{0,tt}^b + \left(\frac{h_b}{8} I_0^c - \frac{h_b I_2^c}{2h_c^2}\right) v_{0,tt}^t$$
$$+\left(I_2^b + \frac{{h_b}^2 I_0^c}{16} + \frac{h_b^2 I_2^c}{4h_c^2}\right) v_{1,tt}^b + \left(-\frac{h_b h_t I_0^c}{16} + \frac{h_b h_t I_2^c}{4h_c^2}\right) v_{1,tt}^t$$
$$+\left(\frac{h_b I_2^c}{4} - \frac{h_b h_c^2 I_0^c}{16}\right) v_{2,tt}^c + \left(\frac{h_b h_c I_2^c}{8} - \frac{h_b I_4^c}{2h_c}\right) v_{3,tt}^c =$$
$$M_{y,y}^b + S_{xy,x}^b + \frac{h_b Q_{yz}^c}{2h_c} - Q_{yz}^b$$

(۲۶)

δu_2^c:

$$\left(-\frac{h_c^2}{8} I_0^c + \frac{I_2^c}{2}\right) u_{0,tt}^t + \left(-\frac{h_c^2}{8} I_0^c + \frac{I_2^c}{2}\right) u_{0,tt}^b$$
$$+\left(\frac{h_t h_c^2}{16} I_0^c - \frac{h_t I_2^c}{4}\right) u_{1,tt}^t + \left(\frac{h_b h_c^2}{16} I_0^c - \frac{h_b I_2^c}{4}\right) u_{1,tt}^b$$
$$+\left(I_4^c - \frac{h_c^2 I_2^c}{2} + \frac{h_c^4 I_0^c}{16}\right) u_{2,tt}^c = -2S_{xz}^c$$

(۲۷)

δv_2^c:

$$\left(-\frac{h_c^2}{8} I_0^c + \frac{I_2^c}{2}\right) v_{0,tt}^t + \left(-\frac{h_c^2}{8} I_0^c + \frac{I_2^c}{2}\right) v_{0,tt}^b$$
$$+\left(\frac{h_t h_c^2}{16} I_0^c - \frac{h_t I_2^c}{4}\right) v_{1,tt}^t + \left(\frac{h_b h_c^2}{16} I_0^c - \frac{h_b I_2^c}{4}\right) v_{1,tt}^b$$
$$+\left(I_4^c - \frac{h_c^2 I_2^c}{2} + \frac{h_c^4 I_0^c}{16}\right) v_{2,tt}^c = -2S_{yz}^c$$

(۲۸)

δw_2^c :

$$\left(-\frac{h_c^2}{8} I_0^c + \frac{I_2^c}{2}\right) w_{0,tt}^t + \left(-\frac{h_c^2}{8} I_0^c + \frac{I_2^c}{2}\right) w_{0,tt}^b +$$
$$\left(I_4^c - \frac{h_c^2 I_2^c}{2} + \frac{h_c^4 I_0^c}{16}\right) w_{2,tt}^c =$$
$$-\frac{h_c^2}{4}\left(Q_{xz,x}^c + Q_{yz,y}^c\right) +$$
$$\left(R_{xz,x}^c + R_{yz,y}^c\right) - 2M_z^c$$

(۲۹)

δu_3^c:

$$\left(\frac{I_4^c}{h_c} - \frac{h_c I_2^c}{4}\right) u_{0,tt}^t + \left(-\frac{I_4^c}{h_c} + \frac{h_c I_2^c}{4}\right) u_{0,tt}^b$$
$$+\left(\frac{h_t h_c^2}{8} I_2^c - \frac{h_t I_4^c}{2h_c}\right) u_{1,tt}^t + \left(\frac{h_b h_c}{8} I_2^c - \frac{h_b I_2^c}{2h_c}\right) u_{1,tt}^b$$
$$+\left(I_6^c - \frac{h_c^2 I_4^c}{2} + \frac{h_c^4 I_2^c}{16}\right) u_{3,tt}^c = \frac{h_c^2 Q_{xz}^c}{4} - 3R_{xz}^c$$

(۳۰)

$$+\left(\frac{h_t h_c^2}{8} I_2^c - \frac{h_t I_4^c}{2h_c}\right) v_{1,tt}^t + \left(\frac{h_b h_c}{8} I_2^c - \frac{h_b I_2^c}{2h_c}\right) v_{1,tt}^b$$
$$+\left(I_6^c - \frac{h_c^2 I_4^c}{2} + \frac{h_c^4 I_2^c}{16}\right) v_{3,tt}^c = \frac{h_c^2 Q_{yz}^c}{4} - 3R_{yz}^c$$

(۳۱)

δw_3^c :

$$\left(\frac{I_4^c}{h_c} - \frac{h_c I_2^c}{4}\right) w_{0,tt}^t + \left(-\frac{I_4^c}{h_c} + \frac{h_c I_2^c}{4}\right) w_{0,tt}^b +$$
$$\left(I_6^c - \frac{h_c^2 I_4^c}{2} + \frac{h_c^4 I_2^c}{16}\right) w_{3,tt}^c = -3P_z^c + \frac{h_c^2}{4} N_z^c$$
$$-\frac{h_c^2}{4}\left(S_{xz,x}^c + S_{yz,y}^c\right) + \left(V_{xz,x}^c + V_{yz,y}^c\right)$$

(۳۲)

شرایط مرزی مسئله برای تکیه‌گاه ساده در a و b به‌صورت رابطه (۳۳) بیان گردید:

$$x = 0:$$
$$u_0^i = v_0^i = w_0^i = M_x^i = S_{xy}^i = 0$$
$$x = a$$
$$v_0^i = w_0^i = N_x^i = M_x^i = S_{xy}^i = 0$$
$$y = 0$$
$$u_0^i = v_0^i = w_0^i = M_y^i = S_{xy}^i = 0$$
$$y = b$$
$$u_0^i = w_0^i = N_y^i = M_y^i = S_{xy}^i = 0 \quad i = t, b$$

(۳۳)

حل معادلات حرکت

به‌منظور حل معادلات حاکم بر مسئله، با قرار دادن روابط(۱۴) الی (۱۶) در معادلات(۱۷) الی(۳۲) دستگاه معادلات حاکم بر ساندویچ پانل مستطیلی به‌دست آمده است و به‌منظور حل معادلات حرکت از روش مودهای فرضی استفاده گردید. در این روش، پاسخ به‌صورت فرم سری فوریه دوبعدی در یک تابع زمانی هارمونیک با ضرایب مجهول در نظر گرفته شد، به‌طوریکه توابع مذکور شرایط مرزی هندسی مسئله (شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها a و b مطابق روابط(۳۳) را ارضا نماید؛ بنابراین پاسخ نهایی مسئله به‌صورت رابطه (۳٤) بیان گردید.

$$
\begin{bmatrix} u_0^i \\ v_0^i \\ w_0^i \\ u_1^i \\ v_1^i \\ u_f^c \\ v_f^c \\ w_f^c \end{bmatrix} = e^{-I\omega t} * \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{0mn}^i \cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{0mn}^i \sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ W_{0mn}^i \sin(\alpha x)\sin(\beta y) \\ U_{1mn}^i \cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{1mn}^i \sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ U_{fmn}^c \cos(\alpha x)\sin(\beta y) \\ V_{fmn}^c \sin(\alpha x)\cos(\beta y) \\ W_{fmn}^c \sin(\alpha x)\sin(\beta y) \end{bmatrix}_{i=t,b \quad f=2,3}
$$

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \qquad \beta = \frac{n\pi}{b}$$

(۳٤)

در رابطه فوق، m,n شماره موج در جهت x,y و $U_{0,1}^{t,b}, V_{0,1}^{t,b}, W_0^{t,b}, U_{2,3}^c, V_{2,3}^c, W_{2,3}^c$ ضرایب مجهول سری فوریه است که با قرار دادن رابطه (۳٤)در روابط (۱۷) الی(۳۲)، مسئله تبدیل به یک مسئله مقدار ویژه می‌شود.

$$|[K] - [M]\omega^2|\{\chi\} = 0$$
$$\{\chi\} = [U_0^t, V_0^t, W_0^t, U_0^b, V_0^b, W_0^b, U_1^t, V_1^t, U_1^b, V_1^b, U_2^c, V_2^c, W_2^c, U_3^c, V_3^c, W_3^c]^T$$

(۳۵)

در رابطه (۳۵)، [M] و [K] ماتریس‌های جرم و سفتی است که با حل مسئله مقدار ویژه، مقدار مربع فرکانس ساندویچ پانل محاسبه خواهد شد.

نتایج و بحث

در این قسمت، ابتدا دقت فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده از معادلات این مقاله با نتایج تحلیلی موجود در سایر مقالات برای یک صفحه ساندویچی بررسی شده است. سپس تأثیر کسر حجمی لایه آلومینیوم، نسبت طول به ضخامت کل و نسبت ضخامت هسته به رویه برای ساندویچ پانل با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت مورد مطالعه قرار گرفت.

اعتبار سنجی

به‌منظور اعتبار سنجی معادلات به‌دست‌آمده در بخش استخراج معادلات حاکم، یک ساندویچ پانل پنج لایه (۰/۹۰/هسته/۰/۹۰) تحت شرایط مرزی ساده با خواص مکانیکی ذکرشده در جدول ۱) در نظر گرفته شده است [23]:

جدول ۱ مشخصات مکانیکی رویه و هسته [23]

ماده	Graphite/Epoxy	هسته
E1(Gpa)	۱۳۱	۰/۰۰٦۸۹
E2=E3(Gpa)	۱۰/۳٤	۰/۰۰٦۸۹
G23(Gpa)	٦/۲۰۵	۰/۰۰۳٤۵
G13=G12(Gpa)	٦/۹۸۵	۰/۰۰۳٤۵
ν23	۰/٤۹	۰
ν13= ν12	۰/۲۲	۰
ρ(kg/m3)	۱٦۲۷	۹۷

به‌منظور صحت‌سنجی، معادلات به‌دست‌آمده برای سازه مورد اشاره در جدول (۱) حل شده است. فرکانس طبیعی بی‌بعد ساندویچ پانل (رابطه(۳٦))بر اساس شرایط مختلف محاسبه و در جدول (۲) و جدول (۳) ارائه و با نتایج سایر محققان تحلیلی و عددی [23-25] مقایسه شده است. همچنین میزان خطا بر اساس رابطه (۳٦) محاسبه و ارائه گردید.

همان‌طور که در جدول (۲) مشاهده می شود، نتایج به‌دست آمده در فرکانس اول برای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت حدود یک درصد با نتایج حل دقیق [23] اختلاف دارد.

در جدول (۳) نیز نتایج به‌دست آمده فرکانس اول برای نسبت ضخامت هسته به رویه با نتایج حل دقیق [23] حدود یک درصد اختلاف دارد؛ اما انتظار می‌رود با توجه به نحوه حل مسئله و افزایش ضخامت رویه، اختلاف اندکی بین روش حاضر با نتایج حل دقیق ایجاد شود.

$$\bar{\omega} = \frac{\omega b^2 \sqrt{(\rho/E_2)^t}}{h} \qquad (۳٦)$$

$$error = \frac{F_R - F_P}{F_R} * 100$$

R: reference P: present F: frequency

(۳۷)

در رابطه (۳٦) ω فرکانس طبیعی سیستم، b عرض ساندویچ پانل، ρ چگالی رویه ساندویچ پانل، E_2 مدول الاستیسته عرضی رویه و h ضخامت کل ساندویچ پانل را نشان داده است.

جدول ۲ مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد ساندویچ پانل مستطیلی (0/90/core/0/90)، a/b=1 و hc/ht=10

a/h	نتایج کار حاضر	[23]	درصد خطا	[24]	درصد خطا	[25]	درصد خطا
۱۰	۱/۸۵	۱/۸۵	۰	۱/۸٤	۰/٥٤	۱/۸٤	۰/٥٤
۲۰	۳/٤۷	۳/٤۸	۰/۲۹	۳/٤۸	۰/۲۹	۳/٤٦	۰/۲۹
۳۰	٥/۰۲	٥/۰٤	۰/٤۰	٥/۰٦	۰/۷۹	٥/۰۰	۰/٤۰
٤۰	٦/٤٥	٦/٤٦	۰/۱٥	٦/٤٦	۰/۱٥	٦/٤۲	۰/٤۷
٥۰	۷/۷۳	۷/۷۳	۰	۷/۷۱	۰/۲٦	۷/٦۹	۰/٥۲
٦۰	۸/۸٦	۸/۸٥	۰/۱۱	۸/۸٤	۰/۲۳	۸/۸۰	۰/٦۸
۷۰	۹/۸٤	۹/۸۱	۰/۳۱	۹/۷۸	۰/٦۱	۹/۷٦	۰/۸۲
۸۰	۱۰/٦۸	۱۰/٦٤	۰/۳۸	۱۰/٦۳	۰/٤۷	۱۰/٥۹	۰/۸٥
۹۰	۱۱/٤۰	۱۱/۳٤	۰/٥۳	۱۱/۳۳	۰/٦۲	۱۱/۲۹	۰/۹۷
۱۰۰	۱۲/۰۲	۱۱/۹٤	۰/٦۷	۱۱/۹٤	۰/٦۷	۱۱/۹۰	۱/۰۱
میانگین خطا			۰/۲۸		۰/٤٦		۰/٦٦

جدول ۳ مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد ساندویچ پانل (0/90/core/0/90)، a/b=1 و a/h=10

hc/ht	نتایج کار حاضر	[23]	درصد خطا	[24]	درصد خطا	[25]	درصد خطا
۱۰	۱/۸٥	۱/۸٥	۰	۱/۸٤	۰/٥٤	۱/۸٤	۰/٥٤
۲۰	۲/۱٥	۲/۱۳	۰/۹٤	۲/۱۳	۰/۹٤	۲/۱۳	۰/۹٤
۳۰	۲/۳٥	۲/۳۳	۰/۸٦	۲/۳۳	۰/۸٦	۲/۳۳	۰/۸٦
٤۰	۲/٤۹	۲/٤۷	۰/۸۱	۲/٤٦	۱/۲۲	۲/٤۷	۰/۸۱
٥۰	۲/٥۸	۲/٥۷	۰/۳۹	۲/٥٦	۰/۷۸	۲/٥٦	۰/۳۹
میانگین خطا			۰/٦۰		۰/۸۷		۰/۷۱

بررسی نتایج ساندویچ پانل با رویه FML

در این قسمت، با در نظر گرفتن نسبت a/h=10، hc/ht=10 و a/b=1 و چیدمان $AL/-\theta/\theta/Core/\theta/-\theta/AL$ با خواص مکانیکی بیان‌شده در جدول ٤)، اثرات پارامترهای مختلف شامل خواص مواد، اثر ضخامت هسته به رویه، طول به ضخامت کل و همچنین حجم مؤثر کامپوزیت نسبت به لایه آلومینیوم بر روی فرکانس‌های صفحه ساندویچ پانل با رویه FML مورد مطالعه قرار گرفت.

برای بررسی ارتعاشات صفحه ساندویچ پانل با رویه FML از ابتدا لازم است پارامتر حجم مؤثر (Vc) را به‌صورت نسبت حجمی کامپوزیت به‌کار رفته نسبت به حجم کل رویه تعریف کرد. بر این اساس برای رویه آلومینیوم خالص پارامتر حجم مؤثر برابر صفر و برای کامپوزیت خالص پارامتر مذکور برابر یک بدست آمد. در ادامه ابتدا طبق رابطه (۳۸) فرکانس را بر اساس خواص مکانیکی هسته بی‌بعد و برای دو ماده کامپوزیت الیاف شیشه تقویت‌شده با آلومینیوم (Glass Laminate Aluminum Reinforced Epoxy) (GLAR) و کامپوزیت الیاف کربن تقویت‌شده با آلومینیوم (Carbon Laminate Aluminum Reinforced Epoxy) (CARAL) و با در نظر گرفتن زاویه‌های ۳۰ و ٤٥ در جدول (٥) محاسبه و مقایسه می‌گردد.

$$\Omega = \frac{\omega b^2 \sqrt{(\rho/E_2)^{core}}}{h} \qquad (۳۸)$$

در رابطه (۳۸)، ω فرکانس طبیعی سیستم، b عرض ساندویچ پانل، ρ چگالی هسته ساندویچ پانل، E_2 مدول الاستیسته هسته و h ضخامت کل ساندویچ پانل را نشان می‌دهند.

جدول ٤ خواص مکانیکی نمونه هیبرید فلز/کامپوزیت

ماده	Glass /Epoxy [26]	Carbon /Epoxy [27]	AL 2024T3 [26]	هسته [23]
E1(Gpa)	۵۰	۱۸۱	۷۲/٤	۰/۰۰٦۸۹
E2=E3(Gpa)	۱۵/۲	۱۰/۳	۷۲/٤	۰/۰۰٦۸۹
G23(Gpa)	۳/۲۸	۳/۷۸	۲۸	۰/۰۰۳٤۵
G13=G12(Gpa)	٤/۷	۷/۱۷	۲۸	۰/۰۰۳٤۵
ν_{23}	۰/٤۲	۰/٤۹	۰/۳۳	۰
$\nu_{13}=\nu_{12}$	۰/۲۵	۰/۲۷	۰/۳۳	۰
$\rho(kg/m^3)$	۲۵۰۰	۱٦۲۷	۲۷۰۰	۹۷

جدول ۵ مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد ساندویچ پانل مربعی با لایه‌چینی
$AL/-\theta/\theta/Core/\theta/-\theta/AL$، hc/ht=10 و a/h=10

ماده	v_c	زاویه (درجه)	
		۳۰	٤۵
GLAR	۱	۱٤/٦۳	۱٦/۰۰
	۰/۹	۱۵/۸۱	۱۷/٤۷
	۰/۸	۱٦/۲۸	۱۸/۰۵
	۰/۷	۱٦/٤۳	۱۸/۲۳
	۰/٦	۱٦/٤۳	۱۸/۲٤
	۰/۵	۱٦/۳۹	۱۸/۱۸
	۰/٤	۱٦/۳۹	۱۸/۱۵
	۰/۳	۱٦/٤۷	۱۸/۱۹
	۰/۲	۱٦/٦۷	۱۸/۳۵
	۰/۱	۱۷/۰۲	۱۸/٦۵
CARAL	۱	۱۵/٦۱	۱۷/٦۹
	۰/۹	۱۷/۲٦	۱۹/۱۷
	۰/۸	۱۸/۱٤	۲۰/۱۲
	۰/۷	۱۸/۵۷	۲۰/٦۹
	۰/٦	۱۸/۷۳	۲۰/۹۷
	۰/۵	۱۸/۷۱	۲۱/۰۳
	۰/٤	۱۸/۵۹	۲۰/۹۲
	۰/۳	۱۸/٤۵	۲۰/۷۱
	۰/۲	۱۸/۳٤	۲۰/٤٦
	۰/۱	۱۸/۳۰	۲۰/۲۱

همان‌طور که مشخص است فرکانس بی‌بعد ماده GLAR برای زاویه ۳۰ و ٤۵ تا حجم مؤثر ۰/٦ افزایشی و در بازه ۰/٦ الی ۰/٤ کاهشی و سپس با تأثیر خواص آلومینیوم فرکانس افزایشی شده است؛ اما فرکانس بی‌بعد ماده CARAL با توجه به خواص مکانیکی و مدول الاستسیته بالاتر در زاویه ۳۰ درجه تا حجم مؤثر ۰/٦ و برای زاویه ٤۵ درجه فرکانس تا حجم مؤثر ۰/۵ افزایشی و سپس کاهشی گردید.

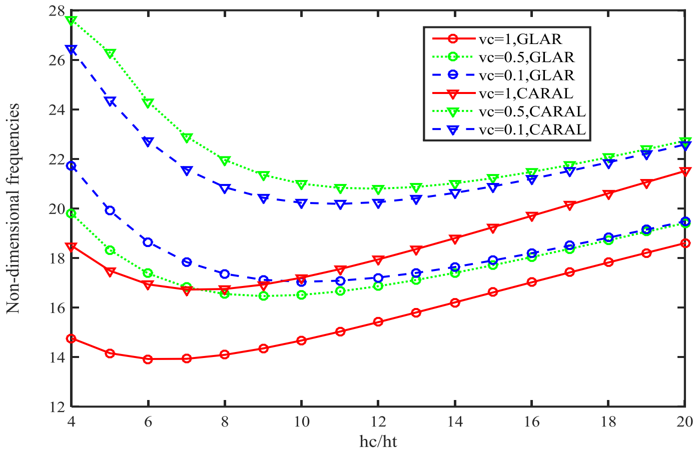
در جدول (٦) فرکانس طبیعی دو نوع لایه‌چینی متعامد (۰و۹۰) و (٤۵و ٤۵-) برای حجم مؤثر ۰/۱ و ۰/۵ در دو جنس GLAR و CARAL محاسبه شده است. همان‌طور که مشخص است در فرکانس ششم تأثیر جنس و لایه‌چینی کم شده و مقادیر فرکانس بی‌بعد نسبت به هم اختلاف کمتری دارد؛ همچنین در لایه‌چینی (٤۵و٤۵-) و در حجم مؤثر ۰/۵ با جنس CARAL بیشترین فرکانس را تا مود ۵ پیش‌بینی نموده است اما در مود ششم به‌دلیل تأثیر لایه آلومینیوم در سازه فرکانس GLAR با حجم مؤثر ۰/۱ بیشترین مقدار را نشان داده است.

برای مطالعه اثر نسبت ضخامت هسته به رویه بر فرکانس طبیعی بی‌بعد، ابتدا حجم مؤثر به‌عنوان یک پارامتر مهم ۱، ۰/۵ و ۰/۱ فرض شد و برای دو جنس GLAR و CARAL در شکل (۲) مقایسه گردید. نتایج نشان داد، در کامپوزیت خالص تا نسبت شش، فرکانس، کاهشی و سپس مقدار فرکانس به مقدار اولیه خود نزدیک شده است؛ همچنین تا نسبت هشت، فرکانس طبیعی هیبرید آلومینیوم/شیشه (GLAR) از حالت کربن خالص مقدار بیشتری را نشان داده است. ضمناً در تمام نسبت‌ها به دلیل سفتی کربن، نمونه هیبرید آلومینیوم/کربن (CARAL)، فرکانس‌های طبیعی بالاتری را دارا می‌باشد.

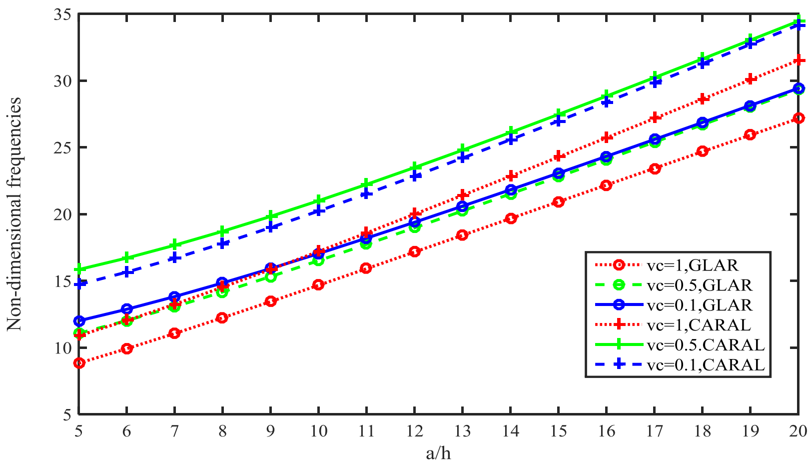
در شکل (۳) اثر نسبت طول به ضخامت کل ساندویچ پانل بر روی اولین فرکانس بی‌بعد با حجم مؤثر ۱، ۰/۵ و ۰/۱ مقایسه شد. نتایج نشان داد، با افزایش نسبت طول به ضخامت کل ساندویچ پانل، فرکانس طبیعی بی‌بعد رویه هیبریدی با حجم مؤثر ۰/۱ و ۰/۵ در نسبت‌های پنج الی ده در مقایسه با کامپوزیت خالص افزایشی حدود شصت الی سی درصدی داشته است؛ اما برای نسبت بیشتر از ده، مقدار فرکانس کامپوزیت خالص با دو جنس GLAR و CARAL روندی افزایشی و با شیب ثابت داشته است؛ همچنین فرکانس رویه هیبریدی الیاف شیشه-اپوکسی تقویت‌شده با آلومینیوم (GLAR) با حجم مؤثر ۰/۱ و در نسبت طول به ضخامت پنج در مقایسه با کربن خالص، افزایش بیست‌درصدی داشت؛ اما با نزدیک شدن به نسبت هشت، تقریباً مقادیر برابر و در ادامه به علت سفتی بالای کربن، فرکانس بی‌بعد کامپوزیت خالص افزایش یافت.

جدول ٦ اثر لایه‌چینی مختلف بر روی شماره فرکانس بی‌بعد ساندویچ پنل مربعی با a/h=10, hc/ht=10

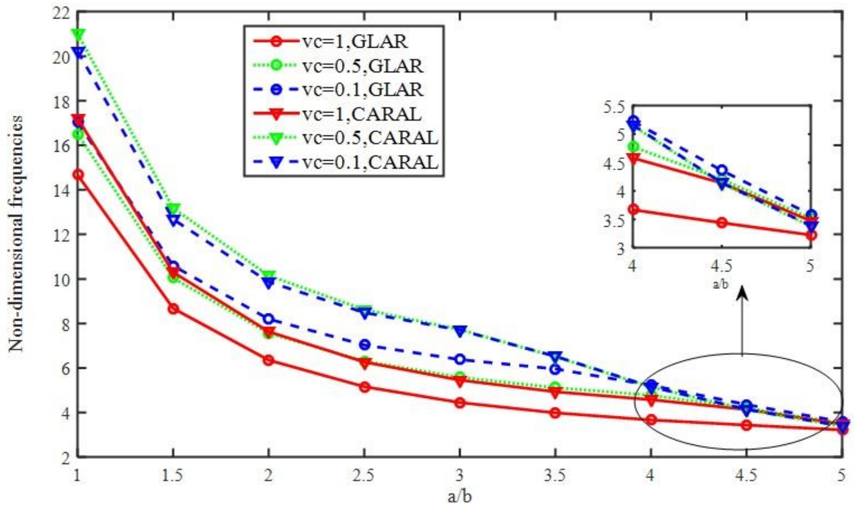
لایه چینی	شمارنده مود	GLAR vc=۰/۵	GLAR vc=۰/۱	CARAL vc=۰/۵	CARAL vc=۰/۱
AL/۹۰/۰/core/۰/۹۰/AL	۱	۱٥/۹٥	۱٦/۹٥	۱۹/۲۳	۱۹/۸۳
	۲	۲۹/۱٤	۳۲/٦۸	۳۷/۰۷	۳۸/۹٤
	۳	٤۰/٤۳	٤۷/٤٤	٥۲/٥٤	٥٦/٥۰
	٤	٤۹/٤۹	٥۷/٥۳	٦٥/۸٤	٦۹/٦۷
	٥	٥۹/٥۱	۷۱/۷۸	۷٦/۹۲	۷۹/٤۱
	٦	۷٦/۹۳	۸٥/۰۲	۸۱/۸۸	۸۲/۸٦
AL/-٤٥/٤٥/core/٤٥/-٤٥/AL	۱	۱٦/۳۹	۱۷/۰۲	۲۱/۰۳	۲۰/۲۱
	۲	۳۰/۲٥	۳۲/۷۹	٤۰/٦۰	۳۹/٤٦
	۳	٤٤/۲۷	٤۸/۰۲	٦۳/۳۸	٥۸/۸۸
	٤	٥۰/۲٦	٥۷/٤۲	٦۹/٥۳	٦۹/۳۳
	٥	٦٥/۱٦	۷۲/٥۰	۸۱/۲۷	۸۰/۱۷
	٦	۸۲/٦۸	۸٥/۳۲	۸٤/۱۰	۸۳/۳٥



شکل ۲ مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد برای ساندویچ پانل مربعی با تغییر نسبت ضخامت هسته به رویه و حجم مؤثر کامپوزیت و a/h=10



شکل ۳ مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد برای ساندویچ پانل مربعی با تغییر نسبت طول به ضخامت کل و حجم مؤثر کامپوزیت با hc/ht=10



شکل ٤ مقایسه اولین فرکانس بی‌بعد برای ساندویچ پانل با تغییر نسبت طول به عرض و حجم مؤثر کامپوزیت با a/h=10 و hc/ht=10

در شکل (٤) اثر افزایش نسبت طول به عرض ساندویچ پانل بر روی اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد با حجم مؤثر ۱، ۰/۵ و ۰/۱ مقایسه شد. نتایج مطالعه نشان داد، با افزایش نسبت طول به عرض ساندویچ پانل، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش داشته است؛ اما برای جنس GLAR با ضریب تأثیر حجمی ۰/۱ نسبت به کامپوزیت خالص کربن بین ضرایب ۱/۵ الی ٤/۵ افزایش حدود ۱۰ الی ۳۰ درصدی داشته است؛ همچنین با افزایش نسبت طول به عرض ٤ به بعد فرکانس‌های بی‌بعد در هر دو جنس GLAR و CARAL در نسبت ۰/۱ به هم نزدیک و اثر لایه کامپوزیت رویه بر فرکانس طبیعی کاهش یافت.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، ارتعاشات آزاد صفحه ساندویچ پانل با رویه هیبرید فلز/کامپوزیت (FML) و با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی برای دو جنس شیشه-اپوکسی و کربن-اپوکسی تقویت‌شده با آلومینیوم مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی برای رویه به‌علت ضخامت کم و تئوری مرتبه سوم برشی برای هسته به‌علت ضخامت قابل توجه، به‌دست آمد و با محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل و قرارگیری در اصل همیلتون معادلات حرکت استخراج گردید. سپس اثر حجم مؤثر لایه فلز و کامپوزیت، نسبت ضخامت هسته به رویه، طول به ضخامت کل، طول به عرض و بررسی شماره مود در دولایه‌چینی ساندویچ پانل بر ارتعاشات سیستم بررسی و نتایج زیر استخراج شد:

۱. بیشترین میزان فرکانس طبیعی بی‌بعد، مربوط به لایه‌چینی AL/45/-45/core/-45/45/AL و در حجم مؤثر ۰/۵ و پنج مود اول می‌باشد.

۲. رویه هیبریدی GLAR از حجم مؤثر ۰/۸ الی ۰/۱ نسبت به رویه کربن خالص افزایش فرکانس طبیعی را داشته است.

۳. با رشد حجم مؤثر کامپوزیت، فرکانس ماده CARAL به علت سفتی بالاتر کربن از ماده GLAR بیشتر شده است.

٤. فرکانس بی‌بعد رویه‌های هیبریدی GLAR و CARAL با حجم مؤثر ۰/۵ در مقایسه با رویه‌های کامپوزیتی با الیاف شیشه-اپوکسی یا الیاف کربن-اپوکسی در نسبت ضخامت هسته به رویه چهار، اختلافی ۵۰ درصدی را نشان داده که با افزایش نسبت به بیست میزان این اختلاف به ۱۰ درصد کاهش یافته است.

۵. مقدار فرکانس بی‌بعد برای رویه هیبریدی (GLAR) با حجم مؤثر ۰/۱ در مقایسه با کربن خالص افزایش ۲۰ در صدی را در نسبت طول به ضخامت پنج نشان داده است.

٦. فرکانس طبیعی بی بعد رویه هیبریدی GLAR در نسبت طول به عرض ۱/۵ الی ٤/۵ افزایشی از ۱۰ الی ۳۰ درصد را نسبت به کربن خالص نشان داده است.

تقدیر و تشکر

فهرست علائم

h	ضخامت ساندویچ پانل
Top Face (t)	رویه بالایی
Bottom Face (b)	رویه پایینی
Core (c)	هسته
$\bar{\omega}, \Omega$	فرکانس بی‌بعد

واژه نامه

(FML) Fiber Metal Laminate	هیبرید فلز/کامپوزیت
Volume Fraction (V)	حجم مؤثر
Glass Laminate Aluminum Reinforced Epoxy (GLAR)	کامپوزیت الیاف شیشه تقویت شده با آلومینیوم
Carbon Laminate Aluminum Reinforced Epoxy (CARAL)	کامپوزیت الیاف کربن تقویت شده با آلومینیوم

مراجع

[1] H. M. Bahabadi, A. Farrokhabadi, and M. M. Khatibi, “The influence of skin / core debonding effects on the natural frequencies of composite sandwich structures using experimental and numerica”, *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 5, no. 1, Pp. 91–98, 2018.

[2] A. Fereidoon, A. Ghoddosian, A. A. Niyari, “Non-Linear Damping Analysis of Sandwich Composite Structures”, *Contemporary Engineering Sciences*, vol. 4, no. 1, Pp. 37–42, 2011.

[3] P. V. Katariya and S. K. Panda, “Frequency and Deflection Responses of Shear Deformable Skew Sandwich Curved Shell Panel: A Finite Element Approach”, *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 44, no. 2, Pp. 1631–1648, 2019.

[4] R. Rani, R. Lal, “Free vibrations of composite sandwich plates by Chebyshev collocation technique”, *Composites Part B: Engineering*, vol. 165, no. January, Pp. 442–455, 2019.

[5] M. Livani, K. Malekzadeh Fard, A. Negahbanbron, “Analysis of high-order free vibrations of sandwich composite cylinder”, in *27th International Conference on Mechanical Engineering*, Pp. 931–936, (2018). (In Persian)

[6] M. Nasihatgozar, S. M. R. Khalili, “Free vibration of a thick sandwich plate using higher order shear deformation theory and DQM for different boundary conditions”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, vol. 3, no. 1, Pp. 16–24, 2017.

[7] A. Ghodsbin Jahromi, H. Hatami, “Numerical Behavior Study of Expanded Metal Tube Absorbers and Effect of Cross Section Size and Multi-Layer Under Low Axial Velocity Impact Loading”, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, vol. 49, no. 4, Pp. 245–248, 2018. (In persian)

[8] H. Hatami and M. Shariati, “Numerical and Experimental Investigation of SS304L Cylindrical Shell with Cutout Under Uniaxial Cyclic Loading”, *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 43, no. 2, Pp. 139–153, 2019.

[9] H. Hatami, M. Hosseini, A. K. Yasuri, “Perforation of Thin Aluminum Targets Under Hypervelocity Impact of Aluminum Spherical”, *Materials Evaluation*, Vol. 77, Pp. 411-422 2019.

[10] Y. Zhai, J. Ma, and S. Liang, “Dynamics properties of multi-layered composite sandwich doubly-curved shells”, *Composite Structures*, vol. 256, p. 113142, 2021.

[11] K. Malekzadeh Fard, M. Rezaei Hassanabadi, “Free Vibration and Static Bending Analysis of Curved Sandwich

Panel with Magneto-Rheological Fluid Layer in Sheets using Improved High Order Sandwich Panel Theory", *Journal of Science and Technology of Composite*, vol. 1, no. 2, Pp. 49–62, 2015.(In Persian)

[12] A. V. Lopatin, E. V. Morozov, "Fundamental frequency of a corner-supported rectangular sandwich plate with the central lumped mass", *Journal of Sandwich Structures & Materials,* vol. 23. no.8, Pp. 3966-3984, 2020.

[13] A. Szekrényes, "Mechanics of shear and normal deformable doubly-curved delaminated sandwich shells with soft core", *Composite Structures,* vol. 258, 2021.

[14] H. Ravishankar, R. Rengarajan, K. Devarajan, and B. Kaimal, "Free vibration bahaviour of fiber metal laminates, hybrid composites, and functionally graded beams using finite element analysis", *International Journal of Acoustics and Vibrations,* vol. 21, no. 4, Pp. 418–428, 2016.

[15] A. Shooshtari, S. Razavi, "A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates", *Composite Structures*, vol. 92, no. 11, Pp. 2663–2675, 2010.

[16] G. H. Rahimi, M. S. Gazor, M. Hemmatnezhad, and H. Toorani, "Free vibration analysis of fiber metal laminate annular plate by state-space based differential quadrature method", *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2014, Pp. 1-11, 2014.

[17] J. Iriondo, L. Aretxabaleta, and A. Aizpuru, "Characterisation of the elastic and damping properties of traditional FML and FML based on a self-reinforced polypropylene", *Composite Structures*, vol. 131, Pp. 47–54, 2015.

[18] M. Mohandes, A. R. Ghasemi, M. Irani-Rahagi, K. Torabi, F. Taheri-Behrooz, "Development of beam modal function for free vibration analysis of FML circular cylindrical shells", *JVC/Journal of Vibration and Control*, vol. 24, no. 14, Pp. 3026–3035, 2018.

[19] M. M. Kheirikhah, S. M. R. Khalili, and K. Malekzadeh Fard, "Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory", *European Journal of Mechanics, A/Solids,* vol. 31, no. 1, Pp. 54–66, 2012.

[20] J. N. Reddy, *Laminated Composite Plates and Shells*, CRS Peress , New York, 2003.

[21] Y. Frostig, "Buckling Fleible of Sandwich Core-High-Order Theory", *Journal of Solids and Structures*, vol. 35, no. 97, Pp. 183–204, 1997.

[22] M. H. DATOO, *Mechanic of Fbrous Composites*, vol. 53, no. 9. 1991.

[23] M. K. Rao, K. Scherbatiuk, Y. M. Desai, and A. H. Shah, "Natural Vibrations of Laminated and Sandwich Plates", *Journal of Engineering Mechanics,* vol. 130, no. 11, Pp. 1268–1278, 2004.

[24] O. Rahmani, S. M. R. Khalili, and O. T. Thomsen, "A high-order theory for the analysis of circular cylindrical composite sandwich shells with transversely compliant core subjected to external loads", *Composite Structures*, vol. 94, no. 7, Pp. 2129–2142, 2012.

[25] H. D. Chalak, A. Chakrabarti, M. A. Iqbal, and A. H. Sheikh, "Free vibration analysis of laminated soft core sandwich plates", *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME,* vol. 135, no. 1, Pp. 1–15, 2013.

[26] A. Nazari, K. Malekzadeh Fard, M. Majidian, "Vibration analysis of FML cylindrical shell optimized according to maximum natural frequency under various boundary conditions", *Modares Mechanical Engineering,* vol. 99, no. 9, Pp. 1–10, 2016. (In Persian)

[27] B. Zhang *et al.*, “Analysis and design of carbon fibre clamping apparatus for replacement of insulator strings in ultra-high voltage transmission line”, *The Journal of Engineering,* vol. 2019, no. 16, Pp. 2212–2215, 2019, doi: 10.1049/joe.2018.8907.